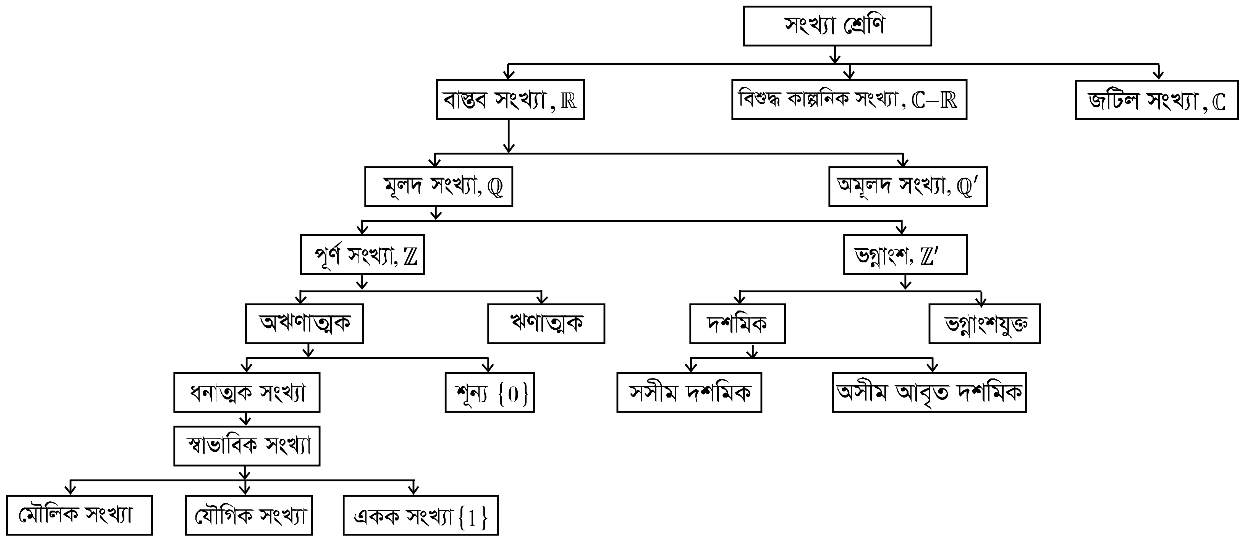
সূচিপত্র

অধ্যায়	অধ্যায়ের নাম	পৃষ্ঠা
প্রথম অধ্যায়	বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা	১-১৫
দ্বিতীয় অধ্যায়	যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম	১৬-২১
তৃতীয় অধ্যায়	জটিল সংখ্যা	২২-৫৪
চতুর্থ অধ্যায়	বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ	৫৫-৮৮
পঞ্চম অধ্যায়	দ্বিপদী বিস্তৃতি	৮৯-১০৯
ষষ্ঠ অধ্যায়	কনিক	১১০-১৬৬
সপ্তম অধ্যায়	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	১৬৭-১৯৪
অষ্টম অধ্যায়	স্থিতিবিদ্যা	১৯৫-২৫৮
নবম অধ্যায়	সমতলে বস্তুকণার গতি	২৫৯-৩১০
দশম অধ্যায়	বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা	৩১১-৩৫২

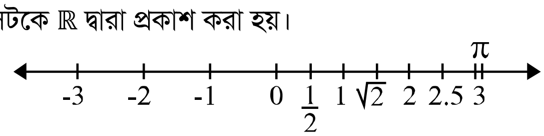
অধ্যায়-০১: বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

♦ **সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস (Classification of numbers):**



♦ **বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of real numbers), ℝ:**
কোনো বাস্তব সংখ্যা একটি মান যা একটি অসীম দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরলরেখা বরাবর একটি পরিমাণ নির্দেশ করে। ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য-সবই বাস্তব সংখ্যা। অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে সংখ্যারেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। বাস্তব সংখ্যার সেটকে ℝ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



♦ **স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (Set of Natural Numbers)** ℕ:
গণনাকারী সংখ্যার সেট (Set of counting numbers) অর্থাৎ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of positive whole numbers বা Set of positive integers) কে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বলা হয়। ইহাকে ℕ দ্বারা সূচিত করা হয়।
যেমন: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. আবার $\{\dots\dots.-4, -3, -2, -1\}$ সংখ্যার সেটকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of negative integers) বলা হয় এবং 0 (শূন্য) নিরপেক্ষ (Neutral integer).

♦ **পূর্ণ সংখ্যার সেট (Set of Integers),** ℤ :
ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, শূন্য এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেটকে পূর্ণ সংখ্যার সেট বলা হয়। ইহাকে ℤ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
যেমন: $\mathbb{Z} = \{\dots\dots.-3, -2, -1,\ 0, 1,\ 2,\ 3\dots\dots\dots\} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\dots\}$

♦ **মূলদ সংখ্যার সেট (Set of Rational Numbers),** ℚ:
যে সমস্ত সংখ্যা দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত (ভাজক শূন্য ব্যতীত) আকারে প্রকাশ করা যায় তাদের সেটকে মূলদ সংখ্যার সেট বলা হয়। মূলদ সংখ্যার সেটকে ℚ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q};$ যেখানে $p, q \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0\}$. যেমন:
(i) সকল পূর্ণ সংখ্যা $\left(2 = \frac{2 \in \mathbb{Z}}{1 \in \mathbb{Z}},\ \ -2 = \frac{-2 \in \mathbb{Z}}{1 \in \mathbb{Z}}\right)$.
(ii) ভগ্নাংশ $\left(-\frac{3}{5} = \frac{-3 \in \mathbb{Z}}{5 \in \mathbb{Z}}\right)$.
(iii) সসীম দশমিক ভগ্নাংশ $\left(3.1 = \frac{31 \in \mathbb{Z}}{10 \in \mathbb{Z}}\right)$.
(iv) পৌনঃপুনিক অসীম দশমিক ভগ্নাংশ $\left(.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{1 \in \mathbb{Z}}{3 \in \mathbb{Z}}\right)$ ℚ সেটের অন্তর্ভুক্ত।

- **অমূলদ সংখ্যার সেট (Set of Irrational Numbers), $\mathbb{Q}'$:**
যে সমস্ত সংখ্যা মূলদ নয় অর্থাৎ যে সমস্ত সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত আকারে প্রকাশ করা যায় না তাদের সেটকে অমূলদ সংখ্যার সেট বলা হয়। অমূলদ সংখ্যার সেটকে $\mathbb{Q}'$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সকল মৌলিক সংখ্যার n তম মূল $(\sqrt{2}, \sqrt[3]{11})$, পৌনঃপুনিক নয় এমন অসীম দশমিক ভগ্নাংশ ইত্যাদি $\mathbb{Q}'$ সেটের অন্তর্ভুক্ত।

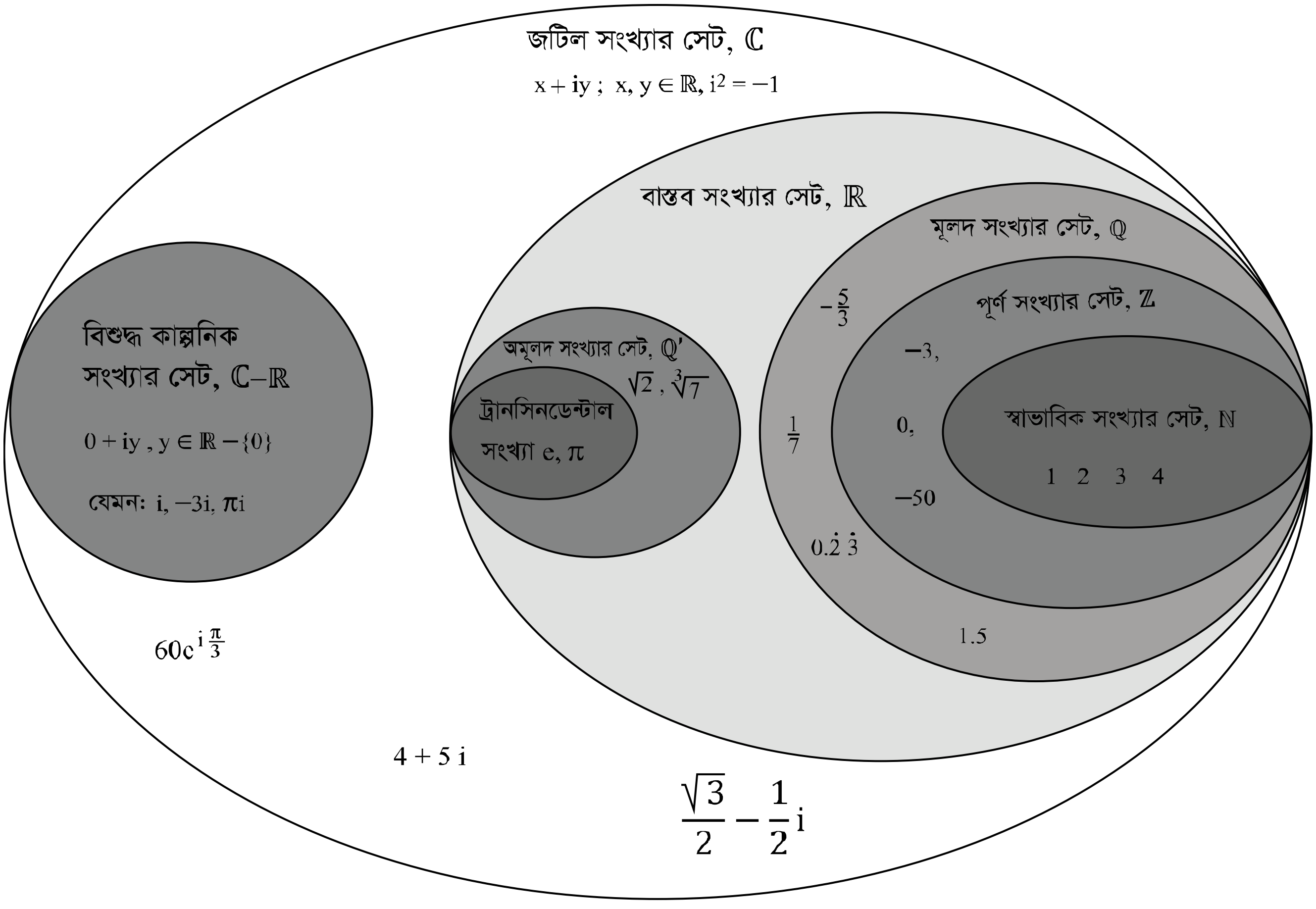
- **তুরীয় সংখ্যা (Transcendental Numbers):**
যে সকল সংখ্যা মূলদ সহগবিশিষ্ট কোন অশূন্য (non-zero) বহুপদী সমীকরণের মূল (বীজ) হতে পারে না সেগুলো হচ্ছে **তুরীয়** সংখ্যা বা ট্রানসিনডেন্টাল সংখ্যা। যেমন: π, e ইত্যাদি। এই তুরীয় সংখ্যাও $\mathbb{Q}'$ সেটের অন্তর্ভুক্ত।

- **অঋণাত্মক সংখ্যার সেট (Set of Non-negative Numbers):** শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যার সেটকে অঋণাত্মক সংখ্যার সেট বলা হয়। যেমন: $\left(3, 0, \frac{1}{2}, 0.23, 1.325, e, \pi\right)$ ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

- **মৌলিক সংখ্যার সেট (Set of prime numbers):** 1 এর চেয়ে বড় যে সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যা যা 1 এবং ঐ সংখ্যা ব্যতীত অন্য সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয় তাদের সেটকে মৌলিক সংখ্যার সেট বলা হয়। ইহাকে $\mathbb{P}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন: $2, 3, 5, 7, 11, \dots\dots\dots$ ইত্যাদি।

- **যৌগিক সংখ্যা বা কম্পোজিট সংখ্যা (Composite Number):** 1 ব্যতিত স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে যে সংখ্যাগুলো মৌলিক নয় তাদেরকে কম্পোজিট সংখ্যা বলে। যেমন: 4, 6, 8, 9, 10, ……… ইত্যাদি। কিন্তু 1 মৌলিক বা যৌগিক কোনটিই নয়। 1 হচ্ছে একক সংখ্যা (Unit number)।
উপরিউক্ত সেটগুলোর সম্পর্ক হল, $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$ ।

- **সংখ্যার ভেনচিত্র:**



- **পরম মান (Absolute Value):**

কোন রাশি শূন্যের বড় হলে যত বড় অথবা শূন্যের ছোট হলে যত ছোট তাই পরম মান। রাশির ডানে ও বামে দুইটি খাড়া রেখা দিয়ে পরম মান প্রকাশ করা হয়। যেমন: 4 এর পরম মান প্রকাশ করা হয় $|4| = 4 - 0 = 4$ এবং -4 এর পরম মান $|-4| = 0 - (-4) = 4$. এখানে 4 ও -4 পরস্পর যোগবোধক বিপরীত রাশি। কিন্তু তাদের পরম মান 4. পরম মান একটি ধনাত্মক মান। সুতরাং দুইটি যোগাত্মক বিপরীত রাশির মধ্যে যেটি বৃহত্তর তাহাই প্রতিটির পরম মান। x অঋণাত্মক হলে x এর পরম মান $|x| = x - 0 = x$. x ঋণাত্মক হলে x এর পরম মান, $|x| = 0 - (x) = -x$

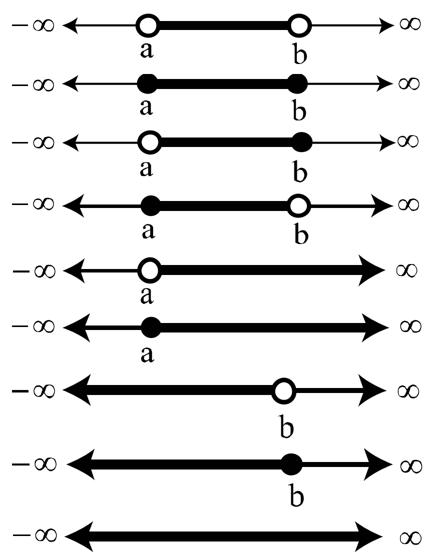
$$\text{বীজগাণিতিকভাবে, } |x| = \begin{cases} x & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

উল্লেখ্য যে, সংখ্যার ফিল্ডে দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে পরম মান দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- নিচের প্রত্যেক প্রকারের সেটকে $\mathbb{R}$ এর ব্যবধি (interval) বলে।

ব্যবধি (Interval) সংখ্যারেখা

01. $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (মুক্ত ব্যবধি)
02. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ (বদ্ধ ব্যবধি)
03. $(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$
04. $[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
05. $(a, \infty) =]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < \infty\}$
06. $[a, \infty) = [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < \infty\}$
07. $(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$
08. $(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \le b\}$
09. $(-\infty, \infty) =]-\infty, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\}$



- বাস্তব সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্মাবলীঃ

(i) আবদ্ধতা (Closure Property): যেকোনো দুইটি বাস্তব সংখ্যার যোগফল ও গুণফল উভয়ই বাস্তব সংখ্যা হবে। অর্থাৎ, বাস্তব সংখ্যার সেট যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ায় বাস্তব সংখ্যার সেটেই আবদ্ধ। যদি, $a, b \in \mathbb{R}$ হয় তবে, (i) $a + b \in \mathbb{R}$ এবং (ii) $ab \in \mathbb{R}$

(ii) অনন্যতা (Uniqueness Property): বাস্তব সংখ্যার সমীকরণের উভয় পক্ষে অনন্য বাস্তব সংখ্যা যোগ করা যায় এবং উভয় পক্ষকে অনন্য বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গুণ করা যায়।

(ক) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a = b$ হলে,

(a) $a + c = b + c$

(b) $a + c = b + d$ [যদি $c = d$ হয়]

(খ) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a = b$ হলে,

(a) $ac = bc$

(b) $ac = bd$ [যদি $c = d$ হয়]

(iii) বিনিময় বিধি (Commutative Law): বাস্তব সংখ্যার যোগ এবং গুণ বিনিময়যোগ্য।

যদি, $a, b \in \mathbb{R}$ হয় তাহলে,

(a) $a + b = b + a$

(b) $ab = ba$

(iv) সংযোগ বিধি (Associative Law):

বাস্তব সংখ্যাগুলির যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া সংযোগ বিধি মেনে চলে।

$a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে,

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(b) $a(bc) = (ab)c$

(v) বন্টন বিধি (Distributive Law):

বাস্তব সংখ্যার গুণ, যোগের উপর বন্টনযোগ্য।

$a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে,

(a) $a(b + c) = ab + ac$

(b) $(b + c)a = ba + ca$

(vi) অভেদকের অস্তিত্ব (Existence of Identity):

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণের অভেদক বিদ্যমান।

(ক) যোগের অভেদক: কোনো বাস্তব সংখ্যার সাথে যে বাস্তব সংখ্যা যোগ করলে পূর্ববর্তী বাস্তব সংখ্যার কোনো পরিবর্তন হয় না, তাকে যোগের অভেদক বলে। 0 হলো যোগের অভেদক।

$a + 0 = 0 + a = a$

(খ) গুণের অভেদক: কোনো বাস্তব সংখ্যার সাথে যে বাস্তব সংখ্যা গুণ করলে পূর্ববর্তী বাস্তব সংখ্যার কোনো পরিবর্তন হয় না, তাকে গুণের অভেদক বলে। 1 হলো গুণের অভেদক।

$a.1 = 1.a = a$

(vii) বিপরীতকের অস্তিত্ব (Existence of Inverse):

সকল বাস্তব সংখ্যার যৌগিক বিপরীতক (Additive Inverse) এবং সকল অশূন্য বাস্তব সংখ্যার গৌণিক বিপরীতক (Multiplicative Inverse) আছে।

(ক) যৌগিক বিপরীতকঃ কোনো বাস্তব সংখ্যার সাথে যে বাস্তব সংখ্যা যোগ করলে যোগের অভেদক পাওয়া যায় তাকে যৌগিক বিপরীতক বলে।

$a \in \mathbb{R}$ হলে, $(-a) \in \mathbb{R}$ এবং $(-a)$ হলো যৌগিক বিপরীতক।

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

(খ) গৌণিক বিপরীতকঃ কোনো অশূন্য বাস্তব সংখ্যার সাথে যে বাস্তব সংখ্যা গুণ করলে গুণের অভেদক পাওয়া যায় তাকে গৌণিক বিপরীতক বলে।

$a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ হলে, $a^{-1} \in \mathbb{R}$ এবং a^{-1} হলো গৌণিক বিপরীতক।

$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

(viii) বর্জন বিধি (Exclusion Law):

(a) যোগের বর্জন বিধিঃ $a, b, c \in \mathbb{R}$, এবং $a + c = b + c$ হলে, $a = b$.

(b) গুণের বর্জন বিধিঃ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ এবং $ac = bc$ হলে, $a = b$.

(ix) শূন্য দ্বারা গুণঃ $a \in \mathbb{R}$ হলে, $a.0 = 0.a = 0$

পরমমানের ধর্ম (Properties of Absolute value):

(i) $|a| \geq 0$

(ii) $|a| \geq a$

(iii) $|a|^2 = a^2$

(iv) $|ab| = |a||b|$

(v) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(vi) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(vii) $|a - b| \leq |a| + |b|$

(viii) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (ix) $-|a| \leq a \leq |a|$

(x) $a \geq 0$ এবং $|x| \leq a$ হলে, $-a \leq x \leq a$

(xi) $a > 0$ এবং $|x| < a$ হলে, $-a < x < a$

(xii) $a \geq 0$ এবং $|x| \geq a$ হলে, $x \leq -a$ অথবা, $x \geq a$

(xiii) $a \geq 0$ এবং $|x| > a$ হলে, $x < -a$ অথবা, $x > a$

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: পরম মানের সাহায্যে প্রকাশ সংক্রান্ত

➲ **Concept**: অসমতাকে পরম মানের সাহায্যে প্রকাশ করলে দুই রকম Case হতে পারে।

(i) $|x-c| \le d \Rightarrow -d \le x-c \le d \therefore c-d \le x \le c+d$

প্রদত্ত অসমতা থেকে $(c+d)$ এবং $(c-d)$ এর মান বের করে, Solve করার পর c, d এর মান নির্ণয় করা যায়। এই c, d এর মান $|x-c| \le d$ তে বসিয়ে অসমতাকে পরম মানের সাহায্য প্রকাশ করে।

বিকল্প: ধরি, $a \le x \le b$; এখন, a এবং b এর গড় $= \frac{a+b}{2}$

সকল পক্ষ হতে গড়মান বাদ দিলে, $a-\frac{a+b}{2} \le x-\frac{a+b}{2} \le b-\frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{2} \le x-\frac{a+b}{2} \le \frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow -\frac{(b-a)}{2} \le x-\frac{a+b}{2} \le \frac{b-a}{2}$

$\therefore \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{b-a}{2}$ [$\because -a \le x \le a$ হলে $|x| \le a$]

(ii) $|x-c| \ge d$ হলে, $\pm(x-c) \ge d$

$(+) \Rightarrow x-c \ge d \therefore x \ge c+d$ এবং $(-) \Rightarrow -(x-c) \ge d \Rightarrow x-c \le -d \therefore x \le c-d$

অর্থাৎ, প্রদত্ত অসমতা থেকে পূর্বের ন্যায় c ও d এর মান বের করে $|x-c| \ge d$ সমীকরণে বসাতে হবে।

বিকল্পঃ $a < b$ হলে,

ধরি, $x \le a$ অথবা $x \ge b$ ……… (i)

এখন, a ও b এর গড় $\frac{a+b}{2}$ সকল পক্ষ থেকে গড় মান বাদ দিলে,

$\Rightarrow x-\frac{a+b}{2} \le a-\frac{a+b}{2}$ অথবা, $x-\frac{a+b}{2} \ge b-\frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow x-\frac{a+b}{2} \le -\frac{b-a}{2}$ অথবা, $x-\frac{a+b}{2} \ge \frac{b-a}{2}$ ……… (ii)

$\Rightarrow -\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{b-a}{2}$ ……… (i)

(i) ও (ii) হতে পাই $\therefore \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \ge \frac{b-a}{2}$

Example-01: $-7 \le x \le -1$ কে পরম মানের সাহায্যে লিখ। **[DU'04-05, 15-16]**

Sol^n: $-7 \le x \le -1$

$c-d=-7$
$c+d=-1$
$2c \quad =-8$

$\therefore c=-4$; $\therefore d=3 \therefore |x-(-4)| \le 3 \quad \therefore |x+4| \le 3$ **(Ans.)**

বিকল্প: -7 এবং -1 এর গড় $= \frac{-7-1}{2} = -4$

সকল পক্ষ হতে -4 বাদ দিলে,

$-7-(-4) \le x-(-4) \le -1-(-4) \Rightarrow -7+4 \le x+4 \le -1+4 \Rightarrow -3 \le x+4 \le 3 \therefore |x+4| \le 3$

Example-02: $-1 \le 2x-3 \le 5$ কে পরম মান এর সাহায্যে প্রকাশ কর।

Sol^n: $-1 \le 2x-3 \le 5$ বা, $2 \le 2x \le 8$ বা, $1 \le x \le 4$

$c+d=4$
$c-d=1$
$2c \quad =5$

$\therefore c=\frac{5}{2} \therefore d=\frac{3}{2} \therefore \left|x-\frac{5}{2}\right| \le \frac{3}{2} \therefore |2x-5| \le 3$ **(Ans.)**

[$|x-c| < d$ এর জন্যও same case]

Example-03: $x \le -7$ অথবা $x \ge -1$ কে পরমমান এর সাহায্যে প্রকাশ কর।

Sol^n: $\frac{\begin{matrix} c+d=-1 \\ c-d=-7 \end{matrix}}{(+)\Rightarrow 2c=-8}$ $(-) \Rightarrow 2d = 6 \therefore d = 3 \therefore |x-c| \ge d \Rightarrow |x-(-4)| \ge 3 \therefore |x+4| \ge 3$ **(Ans.)**
$\therefore c = -4$

বিকল্পঃ -7 এবং -1 এর গড় $= \frac{-7-1}{2} = -4$

$x \le -7$ অথবা $x \ge -1$

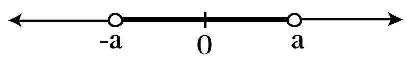
সকল পক্ষ হতে -4 বাদ দিলে, $\Rightarrow x-(-4) \le -7-(-4)$ অথবা $x-(-4) \ge -1-(-4)$

$\Rightarrow x+4 \le -3$ অথবা $x+4 \ge 3 \Rightarrow -(x+4) \ge 3$ অথবা $x+4 \ge 3 \therefore |x+4| \ge 3$ **(Ans.)**

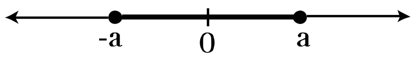
Type-02: পরম মান ব্যতীত প্রকাশ সংক্রান্ত

➲ **Concept**:

(i) সকল $x, a \in R$ এবং $a > 0$ এর জন্য $|x| < a$ হলে $-a < x < a$;



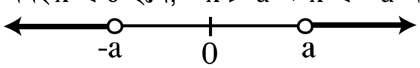
এবং $|x| \le a$ হলে, $-a \le x \le a$



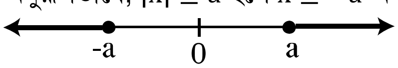
(ii) সকল $x, a \in \mathbb{R}$ এর জন্য যদি $|x| > a$ হয় [$a > 0$]

তাহলে, $x > 0$ হলে, $x > a$

এবং $x < 0$ হলে, $-x > a \Rightarrow x < -a$ অর্থাৎ, $x < -a$ অথবা, $x > a$



অনুরূপভাবে, $|x| \ge a$ হলে $x \le -a$ অথবা, $x \ge a$

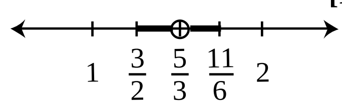


(iii) আবার $x, a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে এবং $\frac{1}{|ax+b|} \le c$ হলে অন্যান্য শর্তের সাথে $ax+b \ne 0 \therefore x \ne -\frac{b}{a}$

শর্তটি সিদ্ধ হতে হবে। [i. e − ex: 4, 6 ইত্যাদি]

Example-04: $\frac{1}{|3x-5|} > 2$ অসমতাটি কখন অসংজ্ঞায়িত? অসমতাটি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যা রেখাতে দেখাও। **[BUET'19-20]**

Sol^n: অসমতাটি $3x-5=0$ বা, $x = \frac{5}{3}$ হলে অসংজ্ঞায়িত।



$|3x-5| < \frac{1}{2}; x \ne \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x-5 < \frac{1}{2}; \ x \ne \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}\ ; \ x \ne \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}\ ; \ x \ne \frac{5}{3} \therefore$ সমাধান সেট $= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right)$

Example-05: সমাধান কর: $\frac{1}{|5x+2|} \ge 5$ **[BUET'16-17]**

Sol^n: $\frac{1}{|5x+2|} \ge 5 \Rightarrow |5x+2| \le \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} \le 5x+2 \le \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} - 2 \le 5x \le \frac{1}{5} - 2$

$\Rightarrow -\frac{11}{5} \le 5x \le -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{11}{25} \le x \le -\frac{9}{25} \left[x \ne -\frac{2}{5}\right]$

Example-06: $\left|5 - \frac{2}{3x}\right| < 1$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর। **[DU’15-16]**

Sol^n: $\left|5 - \frac{2}{3x}\right| < 1 \Rightarrow -1 < 5 - \frac{2}{3x} < 1; \ \ 5 - \frac{2}{3x} < 1 \Rightarrow \frac{2}{3x} + 1 > 5 \Rightarrow \frac{2}{3x} > 4 \Rightarrow \frac{3x}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow x < \frac{1}{6}$

আবার, $5 - \frac{2}{3x} > -1 \Rightarrow \frac{2}{3x} < 6 \Rightarrow \frac{1}{x} < 9 \Rightarrow x > \frac{1}{9} \quad \therefore \frac{1}{9} < x < \frac{1}{6}$

Example-07: $|x-1| > 2$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর। **[SUST’15-16]**

Sol^n: $|x-1| > 2$ হলে, $x-1 > 2 \ \therefore \ x > 3$ অথবা, $x-1 < -2 \ \therefore \ x < -1$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{x \in \mathbb{R}: (-\infty, -1) \cup (3, \infty)\}$

Type-03: বাস্তব সংখ্যার প্রমাণ সংক্রান্ত

➲ **Concept:** এগুলো প্রমাণ করার সময় বাস্তব সংখ্যার এবং পরম মানের বিভিন্ন ধর্ম ব্যবহার করতে হবে।

Example-08: $a \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে $a.0 = 0$

Sol^n: আমরা জানি, $1 + 0 = 1$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব]

$\Rightarrow a(1 + 0) = a.1$ [গুণের অনন্যতা]

$\Rightarrow a.1 + a.0 = a.1$ [বন্টন বিধি]

$\Rightarrow a + a.0 = a$ [গুণের অভেদকের অস্তিত্ব]

$\Rightarrow (-a) + a + a.0 = (-a) + a$ [যোগের অনন্যতা]

$\Rightarrow \{(-a) + a\} + a.0 = \{(-a) + a\}$ [সংযোগ বিধি]

$\Rightarrow 0 + a.0 = 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব]

$\therefore a.0 = 0$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব] **(Showed)**

Example-09: $a, b \in \mathbb{R}$ হলে প্রমাণ কর যে, $-(a + b) = -a - b$

Sol^n: $(a + b) + (-a - b) = a + b + (-a) + (-b)$

$= b + a + (-a) + (-b)$ [বিনিময় বিধি]

$= b + \{a + (-a)\} + (-b)$ [সংযোগ বিধি]

$= b + 0 + (-b)$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব]

$= b + (-b)$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব]

$= 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব]

অর্থাৎ $(a + b)$ এর সাথে $(-a - b)$ যোগ করলে যোগের অভেদক পাওয়া যায়।

$\therefore (-a - b)$ হলো $(a + b)$ এর যৌগিক বিপরীতক।

কিন্তু, $(a + b)$ এর যৌগিক বিপরীতক $-(a + b)$। যৌগিক বিপরীতক অনন্য (একটিই থাকে)।

তাহলে, $-(a + b) = (-a - b)$ $\therefore$ $-(a + b) = -a - b$ (প্রমাণিত)

Example-10: প্রমাণ কর যে, $-|a| \le a \le |a|$; [যখন, $a \in \mathbb{R}$]

Sol^n: ধরি, $a \ge 0$, $\therefore |a| = a \ge 0$, $\therefore -|a| = -a \le a$ ……………… (i)

ধরি, $a \le 0$, $\therefore |a| = -a$ $\therefore \alpha = -|a| \le |a| \therefore a \le |a|$ …………… (ii)

(i) ও (ii) হতে, $-|a| \le a \le |a|$ **(Proved)**

লক্ষ কর: $-|a| \le a \le |a|$ সূত্রটি হতে দুটি সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।

১ম সিদ্ধান্ত: $-|a| \le a$ অর্থাৎ $|a| \ge -a$[-1 দ্বারা গুণ করে] $\therefore -a \le |a|$ **২য় সিদ্ধান্ত:** $a \le |a|$

Example-11: প্রমাণ কর যে, $|a - b| \ge ||a| - |b||$; [যখন, $a, b \in \mathbb{R}$.] **[RUET'12-13]**

Sol^n: আমরা জানি, $|a-b| \le |a| + |b|$ ……… (i); [যখন, $a, b, \in \mathbb{R}$]

$\therefore |a| = |(a - b) + b| \Rightarrow |a| \le |a-b| + |b|$; [(i)নং অনুসারে]

$\therefore |a| - |b| \le |a - b|$ ……… (ii)

আবার, $|b| = |(b - a) + a| \Rightarrow |b| \le |b - a| + |a|$; [(i) নং অনুসারে]

$\Rightarrow |b| - |a| \le |a - b| \Rightarrow -(|a| - |b|) \le |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \ge -|a - b|$; [$-1$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \Rightarrow -|a - b| \le |a| - |b|$ ……… (iii)

(ii) ও (iii) হতে সমন্বয় করে পাই, $-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|$ [$\therefore |x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$]

অর্থাৎ, $|a - b| \ge ||a| - |b||$ (প্রমাণিত)

বিকল্প:

Sol^n: $|ab| \ge ab \Rightarrow -2|a|\,|b| \le -2ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2\,|a|\,|b| \le a^2 + b^2 - 2ab$

$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\,|b| \le a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow (a - b)^2 \ge (|a| - |b|)^2 \Rightarrow (|a - b|)^2 \ge \left(||a| - |b||\right)^2$

$\therefore |a - b| \ge \left||a| - |b|\right|$ [প্রমাণিত]

Example-12: $|x-1|<3$ **হলে, দেখাও যে,** $|x^3-1|<63$

Sol^n: $|x-1|<3 \Rightarrow -3<x-1<3 \Rightarrow -3+1<x-1+1<3+1 \Rightarrow -2<x<4$

$\Rightarrow -8<x^3<64$ [ঘন করে]

$\Rightarrow -8-1<x^3-1<64-1 \Rightarrow -9<x^3-1<63$

$\Rightarrow -63<-9<x^3-1<63 \Rightarrow -63<x^3-1<63$ [$\because$ $a<b<c$ হলে, $a<c$]

$\Rightarrow -63<x^3-1<63 \therefore |x^3-1|<63$ [প্রমাণিত]

Example-13: $|x-1|<\frac{1}{n}$ **হলে প্রমাণ কর যে,** $|x^2-1|<\frac{2n+1}{n^2}$ **যখন n যে কোন অশূন্য ধনাত্মক সংখ্যা।**

Sol^n: দেওয়া আছে, $|x-1|<\frac{1}{n}$ ... ... (i)

$\therefore |x+1|=|x-1+2| \Rightarrow |x+1| \le |x-1|+|2|$ [$\therefore |a+b| \le |a|+|b|$]

$\Rightarrow |x+1|<\frac{1}{n}+2 \left[\therefore |x-1|<\frac{1}{n}\right]$ ... ... (ii)

(i) × (ii) হতে পাই, $|x-1|.|x+1|<\frac{1}{n}.\frac{2n+1}{n}$

$\Rightarrow |(x-1)(x+1)|<\frac{2n+1}{n^2}$; [$\because |ab|=|a|.|b|$]

$\Rightarrow |x^2-1|<\frac{2n+1}{n^2}$ $\therefore |x^2-1|<\frac{2n+1}{n^2}$ [প্রমাণিত]

বিকল্প: $|x-1|<\frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n}<x-1<\frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n}+1<x<\frac{1}{n}+1 \Rightarrow \frac{n-1}{n}<x<\frac{n+1}{n} \Rightarrow \frac{n^2-2n+1}{n^2}<x^2<\frac{n^2+2n+1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{n^2-2n+1}{n^2}-1<x^2-1<\frac{n^2+2n+1}{n^2}-1 \Rightarrow \frac{-2n+1}{n^2}<x^2-1<\frac{2n+1}{n^2}$

$\Rightarrow -\frac{2n+1}{n^2}<x^2-1<\frac{2n+1}{n^2}$ [$\because$ $a<b<c$ হলে, $a<c$]

$\therefore |x^2-1|<\frac{2n+1}{n^2}$ [প্রমাণিত]

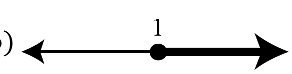
Type-04: ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা সংক্রান্ত

➲ **Concept:**

♦ **ঊর্ধ্বসীমা (Bounded Above):**

যদি $S \subseteq R$ একটি সেট হয়, তাহলে S এর সবচেয়ে বড় উপাদান এবং তার চেয়ে বড় উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত সেটকে S এর ঊর্ধ্বসীমার সেট বলা হয়। ঊর্ধ্বসীমার সেটের ক্ষুদ্রতম মানকে বলা হয় ক্ষুদ্রতম/লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (Least Upper Bound or Supremum). একে Sup S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। Sup S হলো S এর সবচেয়ে বড় উপাদান।

যেমনঃ $S=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\ldots\ldots\right\}$ হলো একটি ঊর্ধ্বসীমিত সেট।

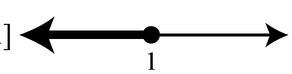
তাহলে এর ঊর্ধ্বসীমাগুলোর সেট হবে $=\{x: x \in \mathbb{R}$ এবং $x \ge 1\}$ বা, $[1,\infty)$ 

$\therefore$ লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বা Sup S = 1.

♦ **নিম্নসীমা (Bounded Below):**

যদি $S \subseteq R$ একটি সেট হয় তাহলে S এর সবচেয়ে ছোট উপাদান এবং তার চেয়ে ছোট উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত সেটকে S এর নিম্নসীমার সেট বলা হয়। নিম্নসীমার সেটের বৃহত্তম মানকে বলা হয় বৃহত্তম/গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (Greatest Lower Bound or Infimum). একে Inf S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। Inf S হলো S এর সবচেয়ে ছোট উপাদান।

যেমন: $S=\{1,2,3,4,5,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ হলো একটি নিম্নসীমিত সেট।

তাহলে এর নিম্নসীমাগুলোর সেট হবে $=\{x: x \in \mathbb{R}$ এবং $x \le 1\}$ বা, $(-\infty,1]$ 

$\therefore$ গরিষ্ঠ নিম্নসীমা, $\text{Inf}\, S=1$

Example-14: $\mathbf{S = \{x \in N; x < 2015\}}$ **এর Supremum কত?**

Sol^n: $S = \{x \in N: x < 2015\} = \{1,2,3 \ldots \ldots \ldots \ldots, 2014\}$

কোনো সেটে যদি বৃহত্তম উপাদান বিদ্যমান থাকে, তবে ঐ বৃহত্তম উপাদানটিই ঐ সেটের Supremum বা Least upper bound। S এর বৃহত্তম উপাদান 2014 $x \in S$ $\therefore$ Sup $(S) = 2014$

Example-15: **বাস্তব সংখ্যার উপসেট** $\mathbf{S = \{x: 5x^2 - 16x + 3 < 0)}$ **এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ও ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা নির্ণয় কর।**

[KUET'04-05, BUTEX'12-13]

Sol^n: দেওয়া আছে, $S = \{x: 5x^2 - 16x + 3 < 0\} = \{x: 5x^2 - 15x - x + 3 < 0\}$

$= \{x: 5x(x-3) - 1(x-3) < 0\} = \{x: (x-3)(5x-1) < 0\} = \left\{x: \frac{1}{5} < x < 3\right\}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা, Sup $(S) = 3$ এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা Inf $(S) = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

Example-16: $\mathbf{c = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}}$ **সেটটির Supremum ও Infimum নির্ণয় কর।**

Sol^n: যে কোন $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $n < n + 1$ বা, $\frac{n}{n+1} < 1$

আবার, $n \in \mathbb{N}$ হওয়ায় $2n+1 > 0$ বা, $n > -(n+1)$ বা, $\frac{n}{n+1} > -1$ $\therefore -1 < \frac{n}{n+1} < 1$ $\therefore \left|\frac{n}{n+1}\right| < 1$

আবার $(-1)^n = -1$ অথবা, 1

$\therefore -1 \leq (-1)^n \leq 1$ $\therefore |(-1)^n| \leq 1$ $\therefore \left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = |(-1)^n| . \left|\frac{n}{n+1}\right| < 1$

$\therefore -1 < (-1)^n \frac{n}{n+1} < 1$ $\therefore$ Sup$(c) \leq 1$, Inf $(c) \geq -1$

এখন, a যদি Sup (c) হয় এবং $a < 1$ হয় তবে এমন জোড় n নেই যেন, $n > \frac{a}{1-a}$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1-a}{a} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} < \frac{1-a}{a} + 1 = \frac{1}{a}$ অর্থাৎ, $\frac{n+1}{n} < \frac{1}{a}$ বা, $\frac{n}{n+1} > a$

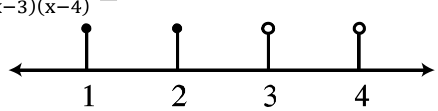
$\therefore (-1)^n \frac{n}{n+1} > a$; $[\because (-1)^n = 1]$ $\therefore a < 1$ হতে পারে না। $\therefore$ Sup (c) ≥ 1

অনুরূপভাবে, বিজোড় $n > -\frac{b}{1+b}$ নিয়ে দেখানো যায়, $b = \text{Inf}(c) \leq -1$ $\therefore$ Sup (c) $= 1$, Inf (c) $= -1$

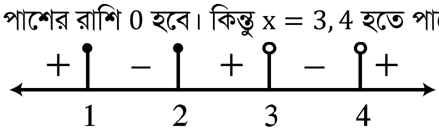
Type-05: অসমতা সংক্রান্ত

➲ **Concept**: প্রায় সব Type এর অসমতা Jump rule এর মাধ্যমে করা যায়। একটি উদাহরণের মাধ্যমে Concept টি বুঝানো হলো-

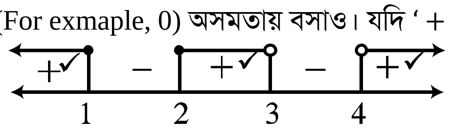
➢ $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$

(i)


প্রথমে উৎপাদকগুলো x এর কোন মানের জন্য 0 হবে তা বসাও। $x = 1, 2$ হতে পারে কারণ $x = 1, 2$ হলে, অসমতার বাম পাশের রাশি 0 হবে। কিন্তু $x = 3, 4$ হতে পারে না, কারণ $x = 3, 4$ হলে, হরে 0 চলে আসে।

(ii)


x এর মানগুলো পুরো সংখ্যারেখাকে কয়েকটি অংশে বিভক্ত করে। এখানে প্রথম অংশ $x < 1$, 1 থেকে ছোট একটি সংখ্যা (For exmaple, 0) অসমতায় বসাও। যদি ' + '/' − ' আসে তাহলে alternative ভাবে বাকিগুলো বসাও চিত্রের ন্যায়।

(iii)


অসমতাটির বাম পক্ষ যদি ধনাত্মক হয় তবে ' + ' আর ঋণাত্মক হলে ' − ' চিহ্নের অঞ্চলগুলো connect করে দাও। এরপর সেটের মাধ্যমে সমাধানকে প্রকাশ কর। $S = (-\infty, 1] \cup [2,3) \cup (4, \infty)$

আরেকটি উদাহরণ দেখলে পুরো ব্যাপারটা clear হবে।